684. Cauchy 級數ノ Parseval 定理ト Hilbert 空間ノ内積

北川　敏男 (阪大)

§1. 問題　$L^2(a, b)$ 函数空間 —— 即チ有限區間 (a, b) デ，自乗ガ L-integrable デアルヤウナ函数全体ヨリナル空間ニ於テハ，通常ソノ任意ノ二ツノ elements f 及ビ g ノ内積ヲ

$$(1)\quad (f, g)=\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

ヲ以テ定義スルコトニヨツテ．Hilbert 空間ガ形成サレル。然シ内積ヲ (1) ノ形ニ定義シナケレバナラヌコトハナイ、要ハ Hilbert space ノ内積トシテノ性質ヲモッタモノデアリサヘスレバヨイ。(1) ノ形式ハ簡單ダカラ、抽象論ノ一ツノ realization ヲ與ヘルトイフ目的ナラベ、何モ云フコトハナイ。

然シ Hilbert 空間論ヲヨリ具体的ナ問題ニ應用スル

トキ —— 例ヘバ、線型微分演算子ノ境界値問題ニ應用スルトキ、*inner product* ガ (1) ノ形デアルガタメニ應用範囲ニ制限ガツクトイフコトハ注意スルマデモナイコトデアロウ。即チ

$$L[y(t)] \equiv \sum_{r=0}^{n} p_r(t)\, y^{(r)}(t)$$

トスルトキ、*formally* ニ、

$$\text{(2)} \quad \int_a^b L[f(t)]\,\overline{g(t)}\,dt = B(f,g) - \int_a^b f(t)\,\overline{L^* g(t)}\,dt \text{ (1)}$$

ナル所謂 *Lagrange* ノ關係式ニ於テ、$B(f,g)$ ハ、

$$\text{(3)} \quad \left.\begin{matrix} f(a) & f'(a)\cdots\cdots, & f^{(n-1)}(a) \\ g(a) & g'(a)\cdots\cdots, & g^{(n-1)}(a) \end{matrix}\right| \begin{matrix} f(b) & f'(b)\cdots\cdots & f^{(n-1)}(b) \\ g(b) & g'(b)\cdots\cdots & g^{(n-1)}(b) \end{matrix}$$

ニノミ *depend* シタモノデアル。手取リ早ク云ヘバ、「兩端ノ値ニノミ關係シタモノ」デアル。L ニ附隨シタ *symmetric transformation* ノ研究ハ、$B(f,g)=0$ ナル條件ニ密接ニ關係スルノデアルカラ、

"内積ヲ (1) ナル形ニトッタ結果、線型微分演算子ノ境界値問題ハ「兩端ノ値ニノミ關係シタモノ」シカ論ゼラレテキナイ。"

トイフコトニナル。コノ間ノ委シイ消息ハ、M. H. *Stone* ノ著 *Linear transformation in Hilbert space*

---

(1) $B(f,g)$ ハ Concommitant, L^* ハ adjoint ナ differential operation

and their applications to analysis, Chapter X, §2—3 ヲミレバ容易ニ看取サレル。

然ルニ、微分方程式ノ境界値問題トシテハ、*Hilbert* 空間論発展ノ以前ニ、モット一般ノ形ノモノガ論ゼラレテキル。ソノ代表トシテJ. D. *Tamarkin: Math. Zeitschr.* 27 (1928) pp 1—54 ヲ挙ゲルコトガ出来ヨウ。ソノ他 *Birkhoff, Stone* ノ研究モアルガ、例ヘバ境界條件トシテ n 個ノ *linear functional*

$$(4)\qquad l^{(\rho)}\{f(\xi)\}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_a^b f^{(\nu)}(\xi)\,d\alpha_{\nu,\rho}(\xi)=0$$

$$(\rho=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ノモトデ、論ジタモノガアル。

(4) ノヤウナ形ノモノニ對シテモ、*Hilbert space* ノ空間ガ適用サレルコトハ望マシイ。ソレニハ内積ヲ (1) ト定メテ掛ッテハ駄目デナイカト思フ。與ヘラレタ (4) ノ形ニ應ジテ、*inner product* ヲ定義シ直シ、ソノ上デ適用スルコトニシタガ宜シカロウト思フノデアル。

以上ハ想像ニ亘ッタコトデ、恐縮デアルカラコンデハ、以上ノ方針デ、試ミタ一ツノ貧弱ナ結果ヲ報告シタイ。ソノ結果ハ、第一階ノ微分演算子 $Df(x)=f'(x)/i$ ニ附随シタ境界條件

$$l_\xi\{f(\xi)\}=\int_a^b f(\xi)\,d\varphi(\xi)$$

ニノミ関聯シタモノデアル。コレデ問題ニツイテノ御説明ヲ

終ル。[2]

§2. 與ヘラレタ linear functional ニ關スル Cauchy 級數ノ導入。

$$l_\xi\{f(\xi)\}=\int_a^b f(\xi)\,d\varphi(\xi)$$

ヲ與ヘラレタ functional トスル。

簡單ノタメニ $a=0$, $b=2\pi$ トスル。

$$G(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{\lambda t}\,d\varphi(t)$$

ハ λ ノ整函數デアル。今茲ニ、contour $\mathfrak{C}$ ヲ λ-plane ニトツテ

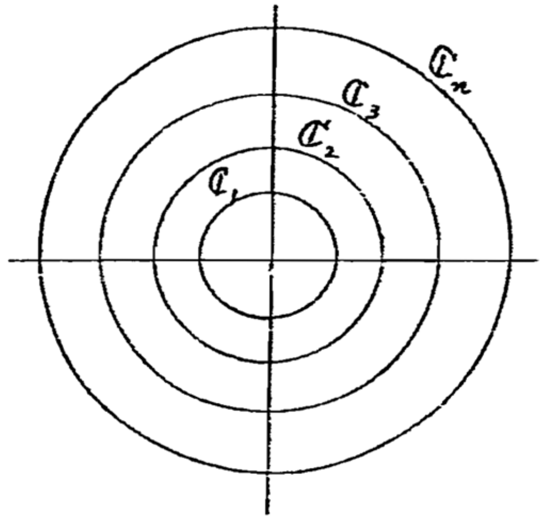
$$(5)\quad S_{\mathfrak{C}}(x,f)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}\,l_\xi\left\{e^{\lambda\xi}\int_0^\xi f(\eta)\,e^{-\lambda\eta}\,d\eta\right\}d\lambda$$

ヲ考ヘルト，コレハ、f ヲアタヘタトキ $\sum\sum a_{p,\nu}x^\nu e^{\lambda_p x}$ ノ形ニナツテ來ル。ソコデ contours ノ sequence

---

(2) 主ナル結果ハ、以下ニ述ベル定理Ⅰ及ビⅡデアル。定理Ⅰヲ得ルタメニ、Cauchy 級數及ビ、特ニソノ Parseval 定理ヲ利用スル。コレラハ、當テ私ガ論ジタコトノアルモノデアルケレドモ、別ナ條件ノモトデ論ズルノデアツテ前論ヲ引用スルコトハナイ。尚私ガ、Jap. Journ. Math. 13 (1937) デノ論文ノ中ニ書イタ Cauchy 級數ノ Parseval 定理ハ、條件ガ多キニ失シ、トテモキタナイ。コレハシカシ簡單ナモノニ直セルコトガ分ツテ來タ。

$\{\mathfrak{C}_\nu\}$ ヲトリ、圖ノ如ク $\mathfrak{C}_\nu$ ノカコム範囲ハダンダンニ全平



面ニ擴ガッテ行クヤウニトル。カクシテ $G(\lambda)$ ノ零点ヲダンダンニソノ内部ニフクメテ行ク、カクシテ

$$\{S_{\mathfrak{C}_\nu}(x,f)\}\quad(\nu=1,2,\cdots\cdots)$$

ハ一ツノ series ヲ定義スル。コレヲ l ニ關スル Cauchy series ト呼ブコトニシヨウ。

$G(\lambda)$ ニ關シテ次ノコトヲ假定スル：

<u>條件 I</u>　$G(\lambda)$ ノ零点ハスベテ純虚数且ツ simple：コレヲ $\{i\lambda_n\}$ デアラハシ、次ノヤウニ番号付ケラレテアルトスル：

$$\cdots\cdots<\lambda_{-n}<\lambda_{-n+1}<\cdots\cdots<\lambda_{-1}<\lambda_0<\lambda_1<\cdots\cdots<\lambda_n<\cdots\cdots$$

<u>條件 II</u>　$|\lambda_n-n|\leqq D\quad(-\infty<n<\infty)$ トナルヤウナ常数 $D<1/\pi^2$ ガ存在スル。

<u>條件 III</u>　正数 α,β ガアッテ、

$$+\infty>\beta\geqq G'(i\lambda_n)\geqq\alpha>0\quad(-\infty<n<\infty)$$

以上ノ如キ條件ヲ漸次導入シツツ議論ヲススメル。

<u>*Lemma 1*</u>　(i)　條件 I — II ノモトニ於テ $f(x)\in L^2(0,2\pi)$ ノ、l ニ關スル Cauchy series ヲ

$$(6)\qquad f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}a_n e^{i\lambda_n x}.$$

トアラハストキ[3]、次ノ関係ガ成立スル。

$$\text{(i)}\quad (1-\pi\sqrt{D})\sum|a_n|^2 \leqq \int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx$$

$$\leqq (1+\pi\sqrt{D})\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2$$

(ii) $\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ ナル任意ノ sequence ニ對シテ

$$\sum a_n e^{i\lambda_n x};\quad \sum a_n e^{-i\lambda_n x}$$

ハ夫々 $L^2(0,2\pi)$, $L^2(-2\pi,0)$ ニ屬スル函数ニ in the mean デ converge スル。

証明ノ方針: 條件 I ノモトニ於テハ $\{e^{i\lambda_n x}\}$ ニ對スル Biorthogonal function-set $\{g_n(x)\}$ ガ定義サレル。他方條件 I, II ヲミタスマウナ $\{e^{i\lambda_n x}\}$ ニ関シテハ、Non-harmonic series[5] ニ展開サレル。Cauchy 展開ト、コノ展開トハ條件 I－II ノモトデハ同ジ展開ヲ意味スルコトガワカル。関係 (i) ハ Non-harmonic series[4] ニツイテ Wiener ノ証明シタトコロデアル、(i) ナル関係カラ、(ii) ハ容易ニ導ケル。

Lemma 1 ニヨリ、次ノコトガ分カル。$f(x)\in L^2(0,2\pi)$

---

(3) 條件 I ノモトデハ、$\{S\mathfrak{C}_r(x,f)\}$ ガ $\{\mathfrak{C}_r\}$ ヲ適當ニトルトキコンナ形ニナルコトハアキラカ。

(4) Wiener-Paley: Fourier transforms in the complex domain. Am. Math. Coll. pp 100 — 113 ヲミラレタシ。

ヲ任意ニ與ヘタトキ、$\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ ヲ f ノ Cauchy 展開トスルトキ

$$\sum_{-N}^{N} a_n e^{-i\lambda_n x} \quad (N=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

ハ in the mean デアル $f_*(x) \in L^2(-2\pi, 0)$ ニ converge スルカラ

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & [0 \leqq x \leqq 2\pi] \\ f_*(x) & [-2\pi \leqq x < 0] \end{cases}$$

ニヨリ、$f_1(x) \in L^2(-2\pi, 2\pi)$ ヲ define スルコトガ出來ル。

§3. Cauchy series ノ Parseval 關係

Lemma 2　$f(x)$, $g(x)$ ヲバ $L^2(0, 2\pi)$ ニ屬スル任意ノ二ツノ elements トスル。ℓ ニ關スル Cauchy 級数ヲバ

$$(8) \quad \begin{aligned} f(x) &\sim \sum a_n e^{i\lambda_n x} \\ g(x) &\sim \sum b_n e^{i\lambda_n x} \end{aligned}$$

トスル。§2 ノ終リデ述ベタ方法デ、$f(x)$, $g(x)$ ニ對シテ、$L^2(-2\pi, 2\pi)$ ニ屬スル $f_1(x)$, $g_1(x)$ ヲ夫々 define スル。

シカルトキ

$$(9) \quad (f, g) \equiv \ell_\xi \left\{ \int_0^\xi f_1(\eta) \overline{g_1(\eta - \xi)}\, d\eta \right\}$$

ヲ以テ define スルナラバ

$$(10) \quad (f, g) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k b_k G'(i\lambda_k)$$

トナル。（但シ，條件I, II ヲ假定シテノ話デアル）

証明ノ方針：　今假リニ

$$g_{(n)}(x)=\sum_{k=-n}^{n} b_k e^{i\lambda_k x}$$

トオク。

簡單ナ計算ノ示ス如ク

$$\mathfrak{L}_\xi\left\{\int_0^\xi f_1(\eta)\overline{g_{(n)}(\eta-\xi)}\,d\eta\right\}=\sum_{k=-n}^{n} a_k\overline{b_k}\,G'(i\lambda_k)$$

他方ニ於テ

$$\left|\int_0^\xi f_1(\eta)\overline{g_1(\eta-\xi)}\,d\eta-\int_0^\xi f_1(\eta)\overline{g_{(n)}(\eta-\xi)}\,d\eta\right|$$

$$\leqq\sqrt{\int_{-2\pi}^{2\pi}|f(\eta)|^2 d\eta}\cdot\sqrt{\int_{-2\pi}^{2\pi}|g_1(\eta)-g_{(n)}(\eta)|^2 d\eta}$$

デアル。Lemma 1 ニヨリ，$\{g_{(n)}(\xi)\}$ $(n=1,2,3,\text{-----})$ -----$g(\xi)$ニ in the mean[5] デ converge スルカラシテ

$$\left\{\int_0^\xi f_1(\eta)\overline{g_{(n)}(\eta-\xi)}\,d\eta\right\}\quad(n=1,2,3,\text{-------})$$

---

(5)　$g_1(\xi)$ ト $g_{(1)}(\xi)\equiv\sum_{-1}^{1} b_k e^{i\lambda_k x}$ トヲ混同シナイデモラヒタイ。以下 $\{k_n(x)\}$ ガ $k(x)$ ニ in the mean デ converge スルトイフノハ，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|k_n(x)-k(x)|^2dx=0$$

ノ意味デアル。

ハ ξ ノ函數トシテ $[0, 2\pi]$ デ一様ニ

$$\int_0^{\xi} f_1(\eta)\,\overline{g_1(\eta-\xi)}\,d\eta$$

ニ converge スル。$g(\eta)$ ハ bounded variation ダカラ、l ハ (C) デ bounded ナ functional。ダカラ

$$\lim_{n\to\infty} l_{\xi}\left\{\int_0^{\xi} f_1(\eta)\,\overline{g_{(n)}(\eta-\xi)}\,d\eta\right\} = (f, g)$$

トナル。

<u>Lemma 3</u> (9) ニ依ッテ define シタ bilinear form ハ次ノ性質ヲモツ。

(1°) $(af, g) = a(f, g)$ 茲ニ a ハ任意ノ complex number;

(2°) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;

(3°) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ （以上ニ關シテハ條件Ⅰ－Ⅱノ假定ノモトデアル）.

(4°) 條件Ⅲヲ加ヘレバ，（モット ヨワク $G'(i\lambda_n)$ ガスベテノ整數 n ニ對シテ正デモヨイ），$f \neq 0$ 又ハ $f = 0$ カラ夫々 $(f, f) > 0$ 又ハ $(f, f) = 0$ ヲ得ル。

證明ハ Lemma 2 ノ (10) ノ式カラ明ラカ。吾々ハ $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ Cauchy series (6) ニ關シテハ

$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 G'(i\lambda_k) < \infty$ トイフ コトヲ知ッタ。然ルニ逆ニ、

<u>Lemma 4</u>

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 G'(i\lambda_k) < \infty$ ナル如キ任意ノ $\{a_k\}$ $(k = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \cdots\cdots$）ニ對シテ、コレヲ Cauchy 展開ノ係數トスル如キ $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ガ必ズ存在スル。（條件 I, II, III ノモトデ。）シカモ、$f(x)$ ハタゞ一ツニ決マル。

証明：條件 III カラ $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ガ follow スル。

從ツテ、Lemma 1 ニヨリ、（$N_1 > N$ ト假リニスル）

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N}^{-N} a_k e^{i\lambda_k x} - \sum_{-N_1}^{N_1} a_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx$$

$$\leqq (1 + \sqrt{D}\pi) \left(\sum_{-N_1}^{-N} |a_n|^2 + \sum_{N}^{N_1} |a_n|^2 \right)$$

トナルカラ $\left\{ \sum_{-N}^{N} a_k e^{i\lambda_k x} \right\}$ ハ in the mean デ $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ニ tend スル：$f(x) \sim \sum a_k e^{i\lambda_k x}$ トナルコトハ明ラカ。

以上ヲ綜合スレバ、次ノ結果ヲ得ル。

定理 I　$\varphi(\xi)$ ヲバ、$(0, 2\pi)$ ニ於テノ有界変分ノ函數トスル。

$$G(\lambda) \equiv l_\xi \{ e^{\lambda\xi} \} \equiv \int_0^{2\pi} e^{\lambda\xi} d\varphi(\xi)$$

ハ條件 I, II, III ヲ悉クミタストスル。

然ルトキニハ，$L^2(0, 2\pi)$ 空間ニ於テ、内積ヲバ Lemma 3 ノ (9) ニヨツテ define スルコトニヨリ、$L^2(0, 2\pi)$ ハ一ツノ Hilbert space ニナル(6)

（脚註．次頁ヘ）

§ 4. 微分演算ニ附隨スル symmetric transformations

$\mathfrak{D}^* = \{ f(x) = c + \int_0^x g(\xi)\, d\xi$ ノ形デアラハサレル $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ全体（但シ，c ハ任意ノ complex number，g ハ $L^2(0, 2\pi)$ ノ任意ノ element］

$\mathfrak{D} = \left[f(x) = \int_0^x g(\xi)\, d\xi \right.$ ノ形テアラハサレル $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ全体（但シ $g(\xi)$ ハ $L^2(0, 2\pi)$ ニ屬シ，$l_\xi \left\{ \int_0^\xi g(\xi)\, d\xi \right\} = 0$ ナルモノトス)］

$\mathfrak{D}(\theta) = \{ 0 \leqq \theta < 2\pi$ ニ対シ $l_\xi \{ e^{i\theta\xi} f(\xi) \} = 0$ ヲ満足スルヤウナ $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ全体］

H, H(θ), T ハ，夫々，$\mathfrak{D}$，$\mathfrak{D}(\theta)$，$\mathfrak{D}^*$ ヲ domain トシ，各ソノ domain ニ屬スル $f(x)$ ヲバ $f'(x)/i$ ニ transform スルモノトスル。

然ルトキ次ノコトガ云ヘル。

<u>定理 II</u> 定理 I デ定義シタ Hilbert space ニ於テ

---

(6) 何故ニ、$L^2(0, 2\pi)$ カラ、$L^2(-2\pi, 2\pi)$ マデ函数ヲ prolongate シテ考ヘル必要ガアルカトイヘバ、(4) デミラレルヤウニ、integrand ノウチノ $g(\xi)$ ニ関シテハ $-2\pi \leqq \xi \leqq 2\pi$ ニ及バネバナラヌカラデアル。$f(\xi)$ ニ関シテハ、ソノ必要ナク $(0, 2\pi)$ デ define サレテヰレバヨイ。$f(\xi)$ ヲモ $L^2(-2\pi, 2\pi)$ ニマデ拡ゲルノハ単ニ symmetry ノタメニスギナイ。

H, H(θ), T ハ次ノ性質ヲ有スル。

(i) Hハ, closed linear symmetric transf. デ、ソノ adjoint $H^* \equiv T$ デアリ、且ツ H ノ deficiency-index ハ (1, 1) デアル。各 H(θ) ($0 \leqq \theta <$ 2π ノドノ θ ニ対シテモ) ハ皆、H ノ self-adjoint extension.

(ii) H(θ) ハ simple point spectrum ヲモツ、ソノ characteristic values ハ $\lambda_n - \theta$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$) デアリ、characteristic functions ハ $\{e^{i(\lambda_n - \theta)x}\}$ デアル。

コレハ、Stone ノ書ノ Theorem 10.7 ノ拡張ニアタル。即チ

$$
\begin{aligned}
g(\xi) &= -\frac{1}{2} \quad [\xi = 0] \\
&= 0 \quad [0 < \xi < 2\pi] \\
&= \frac{1}{2} \quad [\xi = 2\pi]
\end{aligned}
$$

ニトッタ特別ノ場合ニ相当スル。(但シ Stone ノデハ区間ハ (a, b) トシテアルガ ($0, 2\pi$) トスルモ本質的ナ相違ハナイ)。

コノ定理ノ証明ハ Stone ノヲソノママ用ヒラレル。コヽニ次ノ如キ関係

$$
l_\xi\left\{\int_0^\xi \frac{f'(\eta)}{i}\,\overline{g(\eta-\xi)}\,d\eta\right\} = \frac{\overline{g(0)}}{i}\,l_\xi\{f(\xi)\} - \frac{f(0)}{i}\,l_\xi\{\overline{g(-\xi)}\} - l_\xi\left\{\int_0^\xi f(\eta)\,\frac{\overline{g'(\eta-\xi)}}{i}\,d\eta\right\}.
$$

ノ成立スルコトガ、コウシタ Analogy ヲ辿ルコトヲ許ス原因トナツテヰルコトヲ注意セラレタイ。

§附言　以上ニヨリ、§1 デ述ベタコトハ御報告申上ゲタ。

Theorem III ヲ應用シテ translatable operation ノ operational calculus ヲツクルコトハ別ノ機会ニ譲リ、茲ニ二ツノ問題ガ未解決デアルコトヲ申述ベタイ。諸賢ノ御教示ヲオ願ヒスル次第デス。

問題I. 今一般ニ integral function $G(\lambda)$ ガアツタトシテ、ソレガ條件I, II（前出）ヲ満足シテヰタトスル。ソウシタナラバ、$(0,2\pi)$ デ有界変分ノ適当ナ函数 $\varphi(\xi)$ ガ存在シテ

$$G(\lambda)=\int_0^{2\pi} e^{\lambda\xi}d\varphi(\xi)$$

トナルデアロウカ？（多分條件I, II ダケデハ足リナイ様ニモ思フ。然ラバ、如何ナル條件ヲ加ヘタラヨイカ）コノ問題ガ解決サレルト Non-harmonic Rouries series ト Cauchy series トノ関係ガ明朗ニナル。御協力ヲ得タイト思フ。

問題II　コノ報告デ導入シタ inner product ハ考ヘル operation ガ微分演算ダカラ特別都合ガヨカッタ、（微分演算ト可換ナル operator デモ都合ガヨイ）シカシ、Multiplication ガ入ッテクルト、モウ極メテ不便デアル。普通ノ inner product デアル

ト

$$\int_a^b r(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt = \int_a^b f(t) \overline{r(t)\, g(t)}\, dt$$

トナルカラ、multiplication $Mf(t) = r(t)f(t)$ ハ inner product ニ関シテ簡単ナ性質ヲモツ、シカシ、新シイ inner product ニ関シテハ上ノ如ク簡明デナイ。ソレデ、吾々ノ考ヘタモノハ微分演算等ニノミ都合ノヨイモノデシカナイ。

$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{N} p_\nu(x) y^{(\nu)}(x)$ ガ與ヘラレ、又境界條件 l ガ與ヘラレタトキ、コノ operation L ト functional l トニ，両者ニ関係シテ inner product ヲ新ニ考ヘル必要ガアルデアロウト思ハレル。コウシタ問題ニ興味ヲモタレル方ノ御教示ヲ希望シマス。